Hydropneumatická rezonance a oscilace

jakožto parazitní jev v rozvodech pitné vody, topení apod.

František Ryšánek [Frantisek * Rysanek (AT) post * cz]

K sepsání tohoto zádrhele mne inspiroval problém známých, kterým v nově postaveném rodinném domě za určitých okolností „bručel“ vodovod, pokud otevřeli jeden konkrétní kohoutek v koupelně.

Rezonance elektrická a mechanická – základní vzorce

Rezonanční frekvence LC „oscilátoru“ (pasivního rezonančního obvodu) v elektrotechnice:

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ve vzorci je vidět:

- perioda kmitu = čas [s] = celý jmenovatel zlomku
- perioda = kruh (2 π r) jehož „poloměrem času“ je odmocnina z LC.
- odmocnina z LC znamená vlastně geometrický průměr L a C, což mj. vyjadřuje reálný vliv změny každé z obou součástek na výslednou periodu (a potažmo frekvenci)

V elektrotechnice tedy kmitá setrvačnost=indukčnost cívky s poddajností=kapacitou kondenzátoru. V mechanické analogii kmitá setrvačnost=hmotnost nějakého závaží s poddajností (resp. tuhostí) nějaké pružiny.

Mechanická varianta / analogie výše uvedeného základního vzorce:

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Hmotnost ***m*** [kg] představuje setrvačnost, je analogií indukčnosti ***L*** [H] z elektrického vzorce.

Tuhost pružiny (zde ***k***, jindy značena též ***R*** [N/m]) je v „mechanickém“ vzorci ve jmenovateli – to proto, že analogií elektrické kapacity ***C***[F] by byla „poddajnost“ [m/N], tj. převrácená hodnota tuhosti ***1/k***.

Podrobněji o mechanické tuhosti

Tuhost pružiny znamená sílu, která vyvolá ustálenou výchylku o jednotku vzdálenosti – odtud jednotka „Newton na metr“.

$$k=\frac{F}{s}$$

Konstantní tuhost při různých hodnotách výchylky znamená, že pružina má „lineární charakteristiku“. Existují ale i pružiny progresivní, a lze si představit i pružiny (či mechanické soustavy) s degresivním průběhem síly / klesající tuhostí.

Připustíme-li nelineární charakteristiku pružiny (což je třeba příklad pružin pneumatických), bude možná vhodnější, bavit se o hodnotě tuhosti ***k*** v konkrétním bodě funkce „síla podle výchylky“ = při konkrétní výchylce ***s***, nebo v „blízkém“ okolí konkrétního bodu (abychom mohli nelinearitu s přimhouřením oka lstivě zanedbat). Nyní je tedy síla ***F*** funkcí výchylky ***s***, a stejně tak hledaná tuhost ***k***, která je vlastně tečnou či směrnicí průběhu síly v bodě ***s***. Jinak řečeno, tuhost je derivací síly v konkrétním bodě výchylky. Lze ji tedy obecně zapsat jako

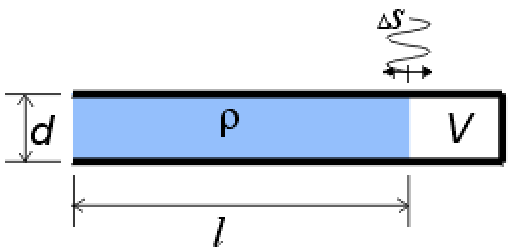
$$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta F(s)}{\Delta s} = F'(s)$$

Povšimněte si, že pro speciální případ lineární pružiny (s konstantní tuhostí) platí pro celý užitečný průběh její výchylky nadále i výše zmíněný vzorec $k = F/s$. Nikoli ovšem pro pružiny progresivní či degresivní.

Výše zmíněná berlička s derivací bude velice důležitá při práci s pneumatickou pružinou. (Při práci s vinutou ocelí bychom ji nepotřebovali.)

Jednoduchý hydropneumatický rezonátor

Obrázek rezonátoru s úvodním komentářem



Pro jednoduchost uvažujme rezonátor tvořený kusem trubky, která je na jednom konci zaslepena. V otevřeném konci je voda, v zaslepeném konci je uvězněna vzduchová bublina.

Voda je těžká a takřka nestlačitelná, vzduch je o tři řády lehčí a pružný=stlačitelný. V našem rezonančním mudrování tedy můžeme velmi pohodlně vzít v úvahu u vody pouze hmotnost a u vzduchu pouze pružnost. Voda = závaží, vzduch = pružina.

Zopakujme si vzorec pro mechanickou rezonanci:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Hmotnost vody

Hmotnost ***m*** je jasná – jedná se o objem válce vody v trubce (=hrdle rezonátoru), krát hustota vody:

$$m = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot l \cdot \rho$$

kde
d = světlý průměr trubky [m]
l = délka vodního válce v trubce [m]
ρ = hustota vody = 1000 [kg/m^3]

Tuhost vzduchu

Ovšem tuhost ***k*** pneumatické pružiny (tvořené bublinou v trubce), ta bude výživnější. Voda a plyn v trubce sdílejí jakýsi základní tlak ***p***, daný nám shůry (nějaký tlak přijde z řadu, dále je možná omezen na přibližně konstantní hodnotu redukčním ventilem). Plynová bublina má při tomto tlaku nějaký objem. Oscilační děj způsobí, že tlak a objem plynu v bublině uvnitř rezonátoru budou kmitat v nějakém blízkém rozmezí kolem výše zmíněné základní „středové“ hodnoty.

Při odvozování si pomůžeme výše naznačenou fintou s derivací. Začněme vzorcem pro izotermický děj při stlačení plynu – tedy vztahem tlaku a objemu, za předpokladu konstantní teploty. Tady si zjednodušujeme práci, on ten oscilační děj bude ve skutečnosti spíš adiabatický – ale toto zanedbání není pro praktické potřeby zásadní, více o tom nakonec.

Tak tedy děj izotermický:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0$$

nebo eventuelně

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V}$$

Mějme dva stavy: „počáteční“ (nulový) a okamžitý/aktuální (bez indexu). Pro tlaky a objemy platí výše uvedený vzorec. A hned je tu první nepříjemnost: zatímco aktuální tlak a objem bubliny známe nebo nás přinejmenším zajímá, „nulový“ stav je cosi hypotetického a konstantního. Máme použít např. atmosférický tlak a odpovídající objem? To je trochu otrava... Ovšem ještě větší otrava by byla, konvergovat nulovým stavem k vakuu... ale možná by se našla elegantnější cesta – v dalším výkladu se o ni pokusíme.

Později/níže tedy bude užitečné, zbavit se proměnných $\boldsymbol{P_0}$ a $\boldsymbol{V_0}$. Naskytne se možnost, zbavit se $\boldsymbol{V_0}$ dosazením – takže se na to trochu připravíme, ekvivalentní úpravou vzorce pro izotermický děj:

$$V_0 = \frac{p \cdot V}{p_0}$$

V hlavním směru uvažování/odvozování nás ale především bude zajímat tlak jako funkce objemu:

$$p(V) = \frac{p_0 \cdot V_0}{V} = p_0 \cdot V_0 \cdot V^{-1}$$

Forma vzorce se zápornou mocninou zjevně představuje lstivě nenápadné nakročení k derivaci. Pokud si dále uvědomíme, že $\boldsymbol{P_0}$ a $\boldsymbol{V_0}$ jsou konstanty, je už derivace dost nuda. A nakonec ještě dosadíme $\boldsymbol{V_0}$ z výše odvozeného polotovaru:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta p(V)}{\Delta V} = p'(V) = (p_0 \cdot V_0 \cdot V^{-1})' = p_0 \cdot V_0 \cdot (-1) \cdot V^{-2} = -\frac{p_0 \cdot V_0}{V^2} = -\frac{p_0 \cdot \frac{p \cdot V}{p_0}}{V^2} = -\frac{p}{V}$$

Záporná hodnota směrnice věcně koresponduje se základní vlastností izotermického děje, že totiž s rostoucím objemem tlak plynu klesá. A bezvadné je, že se nám pokrátil „nulový stav“ :-) Zdá se, že nám to umožnila derivace, která „dala smysl incestnímu dosazení“... (schválně zkuste dosadit za $\boldsymbol{V_0}$ před derivací :-)

Čili zatím jsme se dopracovali k derivaci funkce „tlak podle objemu“ (tzn. změna tlaku podle změny objemu). Odtud bychom se ovšem potřebovali dostat k tuhosti, tzn. k závislosti „zfměna síly potřebná na změnu délky“. Odvozujme tedy dále:

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{p}{V}$$

$$\Delta p = \left(-\frac{p}{V}\right) \cdot \Delta V$$

Řekněme, že má smysl ponechat si zatím ve vzorci objem bubliny $\boldsymbol{V}$ jako jediné písmenko (zatím ho nepřepočítávat na podstavu krát výšku – třeba pro případ, že bychom uvažovali pneumatickou pružinu v podobě obecné baňky/nádržky/nádoby). Bude ale výhodné dekomponovat $\boldsymbol{\Delta V}$, protože zde se jedná jednoznačně o působení „pístu“ tvořeného čelem vodní masy v trubce (kruhová podstava je jasná) a dekompozicí získáme kýženou proměnnou $\boldsymbol{\Delta s}$ (= výchylka = dráha, viz obrázek výše), kterou potřebujeme do vzorce pro tuhost pneumatické pružiny (tady se nám skryje do písmenka ***k***). Už se blížíme.

$$\Delta p = \left(-\frac{p}{V}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \Delta s$$

(***d*** je opět průměr trubky)

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \left(-\frac{p}{V}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

Pořád nám zbývá na levé straně změna tlaku, a my se potřebujeme dopracovat ke změně síly. A protože tlak je síla na plochu (zde na plochu pístu = čela vodní masy v trubce), opět nám vstoupí do hry vzorec pro plochu kruhu:

$$\frac{\dfrac{\Delta F}{\pi \dfrac{d^2}{4}}}{\Delta s} = \left(-\frac{p}{V}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta s} = \left(-\frac{p}{V}\right) \cdot \left(\pi \cdot \frac{d^2}{4}\right)^2 = k$$

Ejhle, vylíhla se tuhost.

Rezonanční frekvence hydropneumatického rezonátoru

Tímto jsme se dopracovali do fáze, kdy máme vyjádřenu hmotnost i tuhost do základního rezonančního vzorce – následuje závěrečné dosazovací delirium:

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\dfrac{m}{k}}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{\dfrac{\pi \cdot \dfrac{d^2}{4} \cdot l \cdot \rho}{\left(-\dfrac{p}{V}\right) \cdot \left(\pi \cdot \dfrac{d^2}{4}\right)^2}}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\dfrac{V \cdot l \cdot \rho}{p \cdot \pi \cdot \dfrac{d^2}{4}}}}$$

Komentář k zjednodušující úpravě po dosazení:
1) pokrátila se nám „plocha pístu“ (***π d²/4***) – zbyla už jenom ve jmenovateli pod odmocninou
2) znaménko členu ***-p/V*** je kosmetické. Vlastně jde o to, jak si chceme orientovat škálu na ose pro výchylku („dráhu“ či „vzdálenost“). Konkrétní orientace je u harmonického kmitání (= „střídavého“ děje) asi věcně lhostejná, zato víme jistě, že nechceme počítat odmocninu ze záporného čísla (frekvence vyjádřená komplexním číslem by nám patrně žádný zvláštní užitek nepřinesla) – takže bude zdravé a beztrestné „mínus“ prostě vypustit.
3) překlopit ***V*** z „dvojitého jmenovatele“ ve složeném zlomku do čitatele je trivialita.

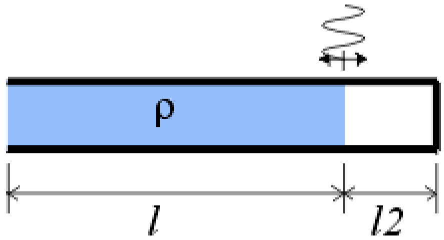
Všimněte si, že čím vyšší tlak, tím vyšší vyjde frekvence (čím vyšší tlak, tím tužší pružina). A čím větší průřez trubky (=pístu), tím vyšší frekvence (při zachování objemu bubliny a tlaku).

Tímto máme tedy vyjádřenu rezonanční frekvenci, spočtenou z objemu vzduchové bubliny a z „délky vody v trubce“ (známe-li také světlý průměr trubky a jmenovitý tlak). Mohlo by se ovšem hodit, pokud pátráme po příčině oscilace a známe přibližnou frekvenci, umět si naopak spočítat „stavební kameny“, tj. přibližný objem plynové bubliny, která kmitům dává pružnost, nebo přibližnou délku trubky, která se na rezonanci podílí hmotou obsažené vody. Vzorec v patřičném tvaru dostaneme několika přímočarými úpravami (nebudu je zde rozpitvávat):

$$V=\frac{p\cdot\pi\,\frac{d^2}{4}}{(2\pi\,f)^2\cdot l\cdot\rho}$$

$$l=\frac{p\cdot\pi\,\frac{d^2}{4}}{(2\pi\,f)^2\cdot V\cdot\rho}$$

Pro zajímavost si ještě uveďme vzorec rezonanční frekvence ve tvaru, kdy nepočítáme s objemem bubliny, ale s „délkou vzduchu v trubce“ (označme si ji třeba $\boldsymbol{l_2}$).



$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{V\cdot l\cdot\rho}{p\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}}}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{l_2\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}\cdot l\cdot\rho}{p\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}}}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{l\cdot l_2\cdot\rho}{p}}}$$

Jak vidíte, „plocha pístu“ se ze vzorce zcela ztratila. Takže „nezáleží na průřezu trubky“, pokud dodržíme shodnou délku vody a délku vzduchu (což předpokládá nestejný objem vzduchu, výše vyjádřený proměnnou $\boldsymbol{V}$). Tento závěr je z praktického hlediska asi dost k ničemu. Snad jen poznámka na okraj: tenčí trubka znamená větší hydrodynamický odpor = více zatlumený rezonátor (ztrátovější). Viz dále kapitola o stabilitě systému.

Snad je zajímavé, že vedle obou „délek“ zbyl ve vzorci už jenom „obvod kruhu“ ($\boldsymbol{2\pi r}$) a „konstanty popisující parametry prostředí“ $\boldsymbol{\rho}$ a $\boldsymbol{p}$.

Příklady

1. Mějme trubku o světlém průměru 20 mm, ve které jsou 4 metry vody a bublina o objemu 1 decilitr vzduchu. To vše pod tlakem 2 atmosféry. Chceme zjistit rezonanční frekvenci.

Nejprve si převedeme všechny vstupní proměnné na jednotky SI:

$\boldsymbol{V}$ = 0,0001 m^3
$\boldsymbol{l}$ = 4 m
$\boldsymbol{\rho}$ = 1000 kg/ m^3
$\boldsymbol{p}$ = 200 000 Pa
$\boldsymbol{d}$ = 0,02 m

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{V\cdot l\cdot\rho}{p\cdot\pi\cdot\frac{d^2}{4}}}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{10^{-4}\cdot 4\cdot 10^3}{2\cdot 10^5\cdot\pi\cdot\frac{0{,}02^2}{4}}}}\doteq 2\,Hz$$

2. Poslechem jsme zjistili, že nám při určitém průtoku začne vibrovat něco ve vodovodní soustavě.

A protože v soustavě nejsou žádné sedlové ventily, regulátory a podobné součástky, náchylné k vibraci při nesprávném zapojení, zbývá aktivní oscilace vzniklá kombinací chaotického děje (vír na hraně) a hydropneumatického rezonátoru. Máme podezření na jednu větev potrubí, která je v dané situaci slepá, a kde by případně mohla být uvízlá vzduchová bublina. Úsek potrubí od nejbližšího „téčka“ k domnělé bublině je dlouhý asi 2 metry. Světlý průřez potrubí je 20 mm. V potrubí je tlak 3 Bary a zázněj má frekvenci odhadem 20 Hz. Chceme spočítat, o jak velkou bublinu by se mohlo jednat.

f = 20 Hz
l = 2 m
ρ = 1000 kg/ m^3
p = 300 000 Pa
d = 0,02 m

$$V = \frac{p \cdot \pi \frac{d^2}{4}}{(2\pi f)^2 \cdot l \cdot \rho} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot \pi \frac{0{,}02^2}{4}}{(2\pi \cdot 20)^2 \cdot 2 \cdot 10^3} \doteq 3 \cdot 10^{-6} m^3 = 3\, cm^3$$

Aktivní prvek: bez něj by to nekmitalo

Zatím jsme se bavili o pasivních rezonátorech – jejich parametry určují především rezonanční frekvenci. Ovšem aby se rezonátor „rozezvučel“, musí mu něco dodávat energii. V zásadě je potřeba zdroj energie a nějaký zesilující prvek = součástka, která vykazuje „amplitudový zisk“.

Dále je třeba, aby zesilující prvek resp. oscilující systém jako celek vykazoval v rámci kmitu nějaké vhodné zpoždění ve smyčce zpětné vazby, zpoždění vyjádřitelné též jako fázový posuv (vztaženo k vlastní frekvenci rezonátoru). Což o to – pokud je na výstupu zesilujícího prvku rezonátor, nebude o vhodný fázový posuv nouze :-)

V teorii zpětnovazební regulace a operačních zesilovačů existuje tzv. Nyquistovo kritérium stability systému, které v zásadě říká, že pokud na nějaké frekvenci bude ve zpětnovazební smyčce celkový zisk větší než 1 a celkový fázový posuv 180^o nebo víc, bude systém nestabilní, bude kmitat (reagovat pozdě a přestřelovat) – a při svém kmitání dá přednost té frekvenci, na které je k mání největší celkový zisk.

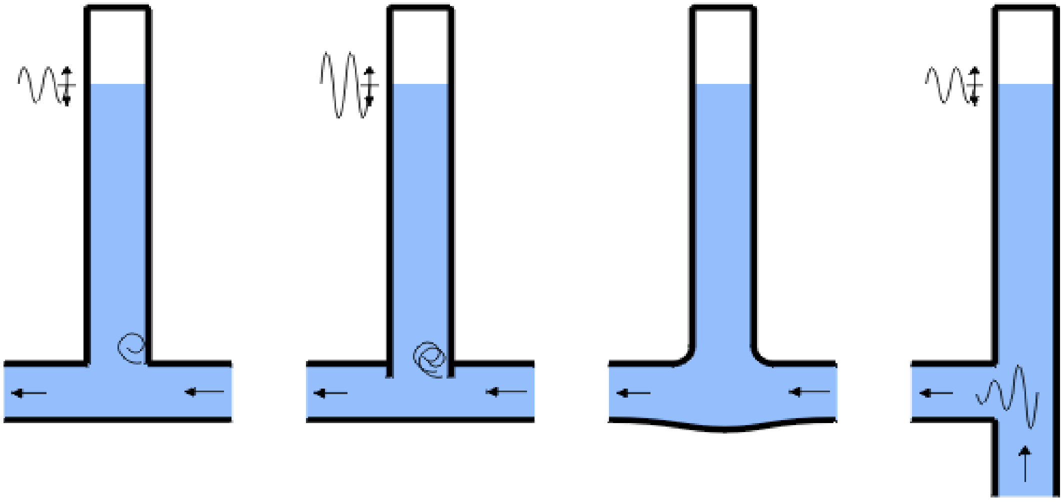
V elektronických oscilátorech je zesilovačem (nositelem zisku) obvykle tranzistor, nebo kaskáda tranzistorů, v některém z typických zapojení.

V mechanických oscilátorech je zesilovačem nějaký mechanický prvek – ventil, regulátor apod., který umožňuje menším množstvím energie (vstup) ovládat průtok většího množství energie (výstup). V mechanických soustavách ovšem „ziskový prvek“ nemusí být nijak složitý, záměrný či na první pohled zjevný – může se jednat o hranu v proudícím plynu či kapalině, která způsobuje víření proudícího média nebo až „soběstačný spínací efekt“ (zkusili jste někdy pískat na flétnu nebo na pivní lahev?) nebo se může třeba jednat o skokový rozdíl mezi statickým a dynamickým třením, což je svého druhu hysterze (zkoušeli jste vrzat mokrým odmaštěným prstem na sklenku či jiné kuchyňské nádobí?).

Často nelze jednoduše určit/odlišit vstup a výstup „zesilujícího prvku“ a přesné schéma parazitní zpětnovazební smyčky (což ve vysokofrekvenční elektronice funguje podobně :-)

Konkrétně v rozvodech vody může být „zisk“ vytvářen vhodně tvarovaným odbočným „téčkem“ - například protože má příliš malý jmenovitý průřez pro daný průtok vody (výsledkem je příliš vysoká rychlost toku), nebo má uvnitř vhodně umístěný otřep/hranu, nebo došlo k chybě při montáži a připojená trubka odbočky zasahuje do světlého profilu uvnitř téčka...

Náčrtek na další stránce vypadá jednoduše. Prakticky ovšem může být problém v nějakém reálném systému (rozvodu vody) s mnoha úseky a větvením nalézt konkrétní úsek který rezonuje a konkrétní prvek, které dodává „zisk“. Na rezonanci a oscilaci se může spolupodílet několik úseků a „zesilujících prvků“. Potažmo může existovat několik různých možných zásahů, z nichž jeden každý sám o sobě povede k potlačení oscilace. Nebo se naopak může stát, že odstraněním jednoho rezonátoru pouze dojde k rozkmitání na jiné rezonanční frekvenci (protože prvek dodávájící zisk zůstal aktivní, a našel si „jiného mazlíčka“). Pro přesné zjištění chování systému by bylo potřeba mít možnost, umístit na libovolné místo v systému čidlo tlaku a průtoku (a třeba si vytvořit „mapu“ tlaků a průtoků), což je zajisté nereálné... a ani s takovou mapou by možná nebylo vyhráno.



K parazitnímu oscilačnímu ději může docházet třeba jenom v nějakém relativně malém rozsahu průtoků, kdy na „parazitním zesilujícím prvku“ nastanou vhodné podmínky pro potřebný chaotický děj (je splněno Nyquistovo kritérium). Nebo při různých tlacích a průtocích může parazitní rezonátor vykazovat různou jakost.

Pokud se parazitní oscilační děj projevuje pouze za určitých podmínek a vcelku neochotně, „rozjezd“ kmitů je pozvolný apod., naznačovalo by to, že přebytek zisku není příliš výrazný, a že by možná stačilo málo (utlumit/rozladit rezonátor), aby se systém vůbec nerozkmital.

Součástí zisku ve „smyčce zpětné vazby“, která kmitání způsobuje, je vedle zisku aktivního prvku také jakost zúčastněného pasivního rezonátoru. Čím kvalitnější rezonátor, tím ostřejší je jeho rezonanční maximum, a tím ochotněji se má k oscilaci. „Neochotu“ rezonátoru kmitat lze popsat jako útlum / energetické ztráty (v mechanických oscilátorech způsobované viskozitou či třením). Ztráty jsou způsobovány vlastnostmi použitých materiálů, prostorovým uspořádáním, případně je lze zvýšit vhodným „tlumičem“ - konkrétně u hydropneumatických rezonátorů připadají v úvahu ztráty třením vody o vnitřní povrch potrubí, ztráty v kolenech apod. - jako možný „přídavný tlumič“ si lze představit zúžený úsek potrubí (analogie činného odporu sériově v LC obvodu).

Co s tím – jak se zbavit oscilace/rezonance

V podstatě je potřeba se zbavit některé součástky „zpětnovazebního oscilačního obvodu“, nebo alespoň natolik zatlumit rezonátor ztrátami, aby oscilátor neměl dost zisku na autonomní kmitání.

Pokud odstraníte rezonátor (seberete mu hmotnost nebo pružnost), oscilace velmi pravděpodobně zmizí, protože aktivní prvek „nemá kam pracovat“. Mechanické zesilovací prvky nemívají velký přebytek zisku, zejména ty parazitní – a často stačí přeladit rezonátor mimo pásmo vysokého zisku. Z tohoto soudku je snaha odvzdušnit vodovod („odstranit pružinu“). No hlavně pokud je co odvzdušňovat, a případně kudy. Třeba zmíněný vibrující vodovod v rodinném domku je docela spletitý, jenom viditelné úseky potrubí obsahují několik slibných zákoutí, která by mohla posloužit shromažďování vzduchu, a odvzdušňovací ventil je asi jenom jeden, na poměrně nesmyslném místě... no montovali to profíci na klíč. Situaci dále komplikuje skutečnost, že v soustavě vodovodu je zapojen bojler o neznámé „tuhosti“ (je obalen tepelnou izolací a elegantním plechovým pouzdrem, těžko říct, jaký přesně tvar má nádoba uvnitř, zda má vypuklá dna, zda může být uvnitř vzduchová kapsa).

Dále by se teoreticky nabízela možnost, rozladit oscilátor záměrnou velikou vzduchovou kapsou, nebo ho zatlumit vložením úzkého místa – obě jsou nepraktické, každá z jiných důvodů.

Jako relativně jednoduchá možnost se nabízí změna jmenovitého tlaku v potrubí (pokud máte přípojku opatřenu stavitelným redukčním ventilem). Změna tlaku trochu ovlivní tuhost pneumatické pružiny a rezonanční frekvenci – zázraky od ní ale nečekejte.

Zásadním opatřením k odstranění oscilace by vždy mělo být ODSTRANĚNÍ PRVKU NESOUCÍHO ZISK! Kde není zisk, tam budou i jakostní rezonátory úplně v klidu. To znamená třeba nahradit podezřelé „téčko“ (vytipované podle trasy užitečného průtoku a podle potenciálních rezonátorů) téčkem s oblejšími vnitřními rádiusy nebo o větším jmenovitém světlém průřezu. Což je trochu problém, pokud je podezřelé téčko pohřbeno půl metru pod betonovou základovou deskou hotového rodinného domku, a jeho polohu pouze tušíme.

Další možné zdroje vibrací/oscilací v rozvodech pitné a topné vody

Obvyklými podezřelými, pokud jde o vibrace, jsou zřejmě všelijaké regulátory a redukční či přepouštěcí ventily. Mají regulační zisk a mohou mít i netriviální reakční zpoždění, navíc asymetrické směrem nahoru a dolů. Konkrétně redukční ventil pro snížení a stabilizaci tlaku na vstupu do budovy by teoreticky mohl být zdrojem vibrací. Prakticky mají dnešní redukční ventily velké zpoždění / krátkodobě hodně malý zisk / poměrně široké regulační rozmezí, takže by nějakou rychlou rezonanci (v desítkách Hz) neměly při správném zapojení způsobovat.
Například v uvedeném domku u známých vodovod původně vibroval i bez redukčního ventilu (místní řad má trvale asi 4 atmosféry, redukční ventil tedy není potřeba a nebyl původně osazen, jak je ostatně v okolí zvykem). Následně dodavatelská firma (která domek stavěla) osadila redukční ventil = snížila tlak a potažmo patrně také maximální průtok (a možná snížila tuhost pneumatické pružiny), čímž posunula vibraci do jiného „stupně otevření vodovodní baterie“. Protože vibrace nezmizela, zkusili ventil ještě dvakrát vyměnit – a světe div se, napotřetí tímto způsobem vibraci odstranili! Je dost možné, že neodstranili „součástku nesoucí zisk“, pouze rozladili rezonanci do té míry, že systém přestal kmitat (nebo snížením tlaku omezili průtok)... důležitý je samozřejmě výsledek.

Dalším obvyklým podezřelým může být jakýkoli SEDLOVÝ VENTIL, ZAPOJENÝ OBRÁCENĚ (průtok v protisměru). Při obráceném průtoku a částečném přivření ventilu dochází k tomu, že hmota vody v trubkách před ventilem svou setrvačností narazí těsnící pístek ventilu na sedlo, čímž se ventil skokem uzavře a setrvačná energie vody se transformuje na tlakový ráz v potrubí. Pokud je tlakový spád na ventilu dostatečně nízký, ventil se zpětným tahem po rázu pootevře, voda po nějakém zpoždění začne protékat, a rázový děj se vzápětí opakuje.
Mám konkrétní zkušenost s termostatickým ventilem ústředního topení (nucený oběh, centrální vytápění z městské teplárny) u nás v práci v kanceláři, který byl na jednom topném tělese namontován sice opticky správně, ale fakticky topná voda protékala tělesem v opačném směru. Při rekonstrukci/adaptaci kanceláří o patro níž (před pár lety) se zřejmě stalo, že při posunutí nenosné stavební příčky bylo potřeba přeložit vedení topné vody – uříznout trubky a natáhnout je přes místnost novou trasou jinudy. A při té příležitosti byly trubky zřejmě nedbalostí topenáře navzájem prohozeny. Za provozu se to chovalo tak, že v širokém pásmu nastavení termostatické hlavice ventil vibroval jak vzteklý. Přestal vibrovat pouze v úplně zavřeném a úplně otevřeném stavu. Když v létě při topné odstávce přišli topenáři věc řešit, nenašli žádný problém, tělo ventilu pro jistotu vyměnili, a po začátku sezóny ventil opět vibroval jak starý diesel. Asi po dvou sezónách jsme ve třech lidech dali hlavy dohromady (odborníci na „měření a regulaci“, z toho jeden Ing.), pojali jsme podezření, nechali jsme těleso vychladnout, pak jsme ventil otevřeli, a hmatem jsme se snažili uhodnout, kterou trubkou přiteče teplá topná voda (= která trubka se dřív ohřeje). Při tomto soustředěném testu

byl již závěr jednoznačný – a při další posezónní odstávce se topenáři činili tentokrát s autogénem.

A ještě úplně na okraj (a dost mimo téma), zažil jsem taky jeden ultrazvukový průtokoměr, použitý v centrálním vytápění na patě činžovního domu, který při cca čtvrtině průtoku slyšitelně pískal (cca 1 kHz). Hvizd byl z topení slyšet i v nižších patrech postiženého domu – ostatně proto jsme se tím zabývali. Rozvodná firma se k problému postavila příkladně, po krátkém testu (náhrada průtokoměru kusem trubky -> nastalo hrobové ticho) souhlasila s diagnózou a průtokoměr vyměnila. Ze strany místního tepelného monopolu opravdu nečekaně přívětivé jednání! To myslím upřímně, několik lidí nám tehdy věnovalo dost času.

Co se jinam nevešlo / poznámky na okraj

λ/4, λ/2

Je-li řeč o rezonátorech, pak bychom kromě obvodu ve stylu „hmotnost+pružina“ měli prověřit také hypotézu o čtvrtvlnné resp. půlvlnné rezonanci – tj. že v trubce rezonuje samotné médium = voda na bázi rychlosti šíření zvuku (změny tlaku) na čtvrtině resp. polovině vlnové délky. Čtvrtvlnný nebo půlvlnný vlnovod je v rádiové elektronice druhým velmi běžným typem rezonátoru (vedle LC obvodu).

Rychlost šíření zvuku ve vodě je nějakých 1450-1500 m/s podle druhu vody. Takže frekvenci 20 Hz by odpovídala vlnová délka asi 75 m => čtvrtvlna (trubka s otevřeným koncem) je necelých 20 m, půlvlna (trubka s uzavřeným koncem) necelých 40 m.

To je relativně dlouhá trubka. Ve srovnání s výše uvedenými příklady, kde se na kmitání podílí poddajnost „štamprdle vzduchu“, jsou tohle řádově delší vzdálenosti, tj. také řádově větší třecí odpor = útlum... a vůbec ta vzdálenost se možná těžko najde někde uvnitř menšího domku. Mohlo by se jednat o přípojku = venkovní úsek od uličního řadu (od vodoměrné jímky?) po zahradě k redukčnímu ventilu v domě. Ale nesedí mi dvě věci: jednak „regulační zisk“ redukčního ventilu nebude velký (pravda poroste trochu s tlakem na vstupu), druhak bych čekal oscilaci spíš s rezonátorem na výstupu, než na vstupu...

Adiabata

Asi je trochu zcestné pitvat, zda se bubliny uvízlé ve vodovodu chovají při změně tlaku izotermicky či adiabaticky. Nicméně – na okraj tohoto zcestného pojednání o rezonanci se snad můžeme dopustit této rozpustilé odbočky :-) Tak tedy:

Vzduch uvízlý v potrubí se patrně bude chovat dlouhodobě spíš izotermicky, a to díky mnohem větší tepelné kapacitě okolní vody: voda teplo podle potřeby odejme či předá = bude stabilizovat teplotu. Asi i materiál potrubí bude mít větší tepelnou kapacitu než vzduch.

Ovšem pokud si představíte vzduchovou bublinu, která se účastní (coby pružina) kmitavého děje o frekvenci řádově 20 Hz, tak je vcelku nasnadě, že za tak krátký okamžik (50 ms celá perioda) vzduch nestihne teplo odevzdat – takže tento rychlý kmitavý děj se bude chovat téměř adiabaticky. Kmitat bude ovšem okolo nějaké střední hodnoty, která bude dlouhodobá = izotermická... Rychlý adiabatický děj, superponovaný na dlouhodobější izotermické rovnováze.

Hranice mezi „rychlým=adiabatickým“ a „pomalým=izotermickým“ dějem může být odhadem 2 sekundy. Zkuste si schválně připojit na vodovodní kohoutek kus průhledné hadice (metr-dva), na konci zaslepený, plný vzduchu. Ve vodovodu je konstantní tlak, bez ohledu na odběr. A pusťte do hadice vodu z kohoutku. Všimněte si, jak se voda nahrne dovnitř, zastaví se, a pak si vzduch ještě během pár vteřin „sedne“ (= odevzdá teplo). Možná také zjistíte, že se hadice ohřála v místech, kde zůstal vzduch... P.S.: až Vás experiment omrzí, přeji příjemnou zábavu při vypouštění obsahu hadice :-) Není od věci, provést zaslepení kulovým kohoutem, spíše než pevnou zátkou...

Zkusme znovu odvodit vzorec pro tuhost pneumatické pružiny, tentokrát pro adiabatický děj. Na střední škole je obvykle uváděn vzorec pro adiabatický děj v tomto tvaru:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0}$$

Vyjadřuje to podstatu adiabatické změny stavu, kterou je zachování energie. To je hezké – nicméně nám to neříká, jak se potenciální energie vložená mechanicky (změnou objemu) rozdělí mezi teplotu a tlak.

Užitečnější je tvar vzorce s Poissonovou konstantou – odtud se dá k něčemu odstartovat:

$$p \cdot V^{\kappa} = p_0 \cdot V_0^{\kappa}$$

jinak řečeno

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0^{\kappa}}{V^{\kappa}} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\kappa}$$

$$V_0^{\kappa} = \frac{p \cdot V^{\kappa}}{p_0}$$

(vlastně ani nemusíme odmocňovat podle kappa, což by byla potenciálně neekvivalentní úprava)

$$p(V) = \frac{p_0 \cdot V_0^{\kappa}}{V^{\kappa}} = p_0 \cdot V_0^{\kappa} \cdot V^{-\kappa}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta p(V)}{\Delta V} = p'(V) = (p_0 \cdot V_0^{\kappa} \cdot V^{-\kappa})' = p_0 \cdot V_0^{\kappa} \cdot (-\kappa) \cdot V^{-\kappa-1} = -\frac{\kappa \cdot p_0 \cdot V_0^{\kappa}}{V^{\kappa+1}} = -\frac{\kappa \cdot p_0 \cdot \frac{p \cdot V^{\kappa}}{p_0}}{V^{\kappa+1}} = -\kappa \frac{p}{V}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\kappa \frac{p}{V}$$

$$\Delta p = \left(-\kappa \frac{p}{V}\right) \cdot \Delta V$$

$$\Delta p = \left(-\kappa \frac{p}{V}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \Delta s$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta s} = \left(-\kappa \frac{p}{V}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{\frac{\Delta F}{\pi \frac{d^2}{4}}}{\Delta s} = \left(-\kappa \frac{p}{V}\right) \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta s} = \left(-\kappa \frac{p}{V}\right) \cdot \left(\pi \cdot \frac{d^2}{4}\right)^2 = k_{adiabata} = \kappa \cdot k_{izoterma}$$

$$f_{adiabata} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot l \cdot \rho}{\left(-\kappa \frac{p}{V}\right) \cdot \left(\pi \cdot \frac{d^2}{4}\right)^2}}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{V \cdot l \cdot \rho}{\kappa \cdot p \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}}}} = \sqrt{\kappa} \cdot \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{V \cdot l \cdot \rho}{p \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}}}} = \sqrt{\kappa} \cdot f_{izoterma}$$

Poissonova konstanta κ je pro „dvouatomové plyny“ (N_2, O_2) rovna ***1,4*** – tzn. odmocnina je cca 1,2. To je podíl mezi frekvencí adiabatického a izotermického rezonančního děje (za jinak stejných okolností).

Odvození vzorce pro periodu/frekvenci rezonance, podrobnější matematický popis rezonátoru

Existuje spousta literatury, která popisuje rezonanční obvod (obvykle elektronický) komplexními čísly v Eulerově notaci: $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j*\sin(\omega t)$. Normálnímu člověku trvá docela dlouho, než při pokusech o pochopení tohoto vztahu (a jeho využití v kmitavé fyzice) přestane zoufale šilhat a tlouci hlavou do zdi. Imaginární jednotka jako odmocnina z -1? Prosím. Ale umocnit tímto nějaké reálné číslo? To je trochu moc...

Proto se níže dopustím něčeho kacířského: pokusím se trochu popsat chování rezonančního obvodu *bez komplexních čísel a bez pana Eulera*.

Elektronika

Klasický postup pro odvození Thomsonova vzorce pro rezonanci (viz výše) v elektronice je napohled vcelku jednoduchý a začíná rovností kapacitní a indukční impedance:

$$X_L = X_C$$

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$f^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 L C}$$

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

Impedance cívky a kondenzátoru je „zdánlivý odpor“. Stejně jako činný odpor se vyjadřuje v Ohmech [Ω] – ovšem díky fázovému posuvu proudu oproti napětí je protékající proud „jalový“. A protože fázový posuv u cívky je o 90° „pozadu“ a u kondenzátoru o 90° „předbíhavý“, vzájemný posuv obou proudů v LC obvodu je 180°, tj. při shodném průběhu napětí budou proudy v protifázi, tj. bude docházet k přelévání energie z kondenzátoru do cívky a zpět. Podmínka rovnosti impedancí znamená pouze tolik, že na rezonanční frekvenci se cívka a kondenzátor „impedančně potkají“ - a přesné impedanční přizpůsobení zajistí dokonalé přelévání energie. Pokud budeme uvažovat dokonalou (bezeztrátovou) cívku a dokonalý (bezeztrátový) kondenzátor, bude se takto v LC obvodu energie přelévat donekonečna. Celková energie v obvodu bude konstantní, pouze se bude neustále přelévat mezi potenciální energií kondenzátoru a „pohybovou“ energií cívky.

Když jsme u těch energií:

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2$$

V rezonančním obvodu posunuto o 90°. Jakpak jde vlastně druhá mocnina dohromady s chováním rezonujícího obvodu v časové doméně? sínus, kosínus, pohyb po kruhu... Možná je to prostě tak, že kruh je jediná možnost. Rezonující obvod/systém se pohybuje po kruhu, jehož poloměrem je nashromážděná energie (nebo spíš odmocnina z této energie?). Vlastně to celé dobře popisuje známý goniometrický vzorec, tolik oblíbený ve středoškolských analytických počtech:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Tyhle druhé mocniny ($\sin^2$+$\cos^2$) korespondují s výše uvedenými druhými mocninami (I^2,U^2). Je totiž třeba si uvědomit, že napětí i proud v rezonančním obvodu kopírují goniometrické funkce a jsou navzájem posunuty o „čtvrt kruhu". Přiřazení funkcí sin/cos veličinám proudu a napětí je zde nejspíš věcí dohody či konvence, záleží jaké znaménko dáme proudu (zda bude kladný směrem od cívky ke kondenzátoru či naopak) – obvyklé je následující použití (napětí má maximum při nulovém úhlu):

$$U=U_{max}\cdot\cos(kt)$$

$$I=I_{max}\cdot\sin(kt)$$

A druhá mocnina vyjadřuje úměru mezi napětím či proudem, a výkonem či energií.

Písmenko ***k*** jsem použil jako „škálovací proměnnou" pro přepočet času na úhel (souvisí s rezonanční frekvencí, v tomto případě by se možná slušelo hovořit o frekvenci úhlové).

Celkovou energii a její přelévání v čase lze tedy popsat vzorcem

$$E_{LC}(t)=\frac{1}{2}C\,U_{max}^2\cdot\cos^2(kt)+\frac{1}{2}L\,I_{max}^2\cdot\sin^2(kt)=const.$$

Pokud se nad tím zamyslíte, musíte nutně dojít k závěru, že $\boldsymbol{k = 2\pi f}$:-) Ejhle úhlová frekvence.

$$E_{LC}(t)=\frac{1}{2}C\,U_{max}^2\cdot\cos^2(2\pi\,f\,t)+\frac{1}{2}L\,I_{max}^2\cdot\sin^2(2\pi\,f\,t)=const.$$

Ovšem frekvenci (v [Hz]) a úhlovou frekvenci (v [Rad/s]) umíme spočítat z Thomsonova vzorce:

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$2\pi\,f=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Po dosazení, pokud budeme počítat okamžitý úhel v radiánech:

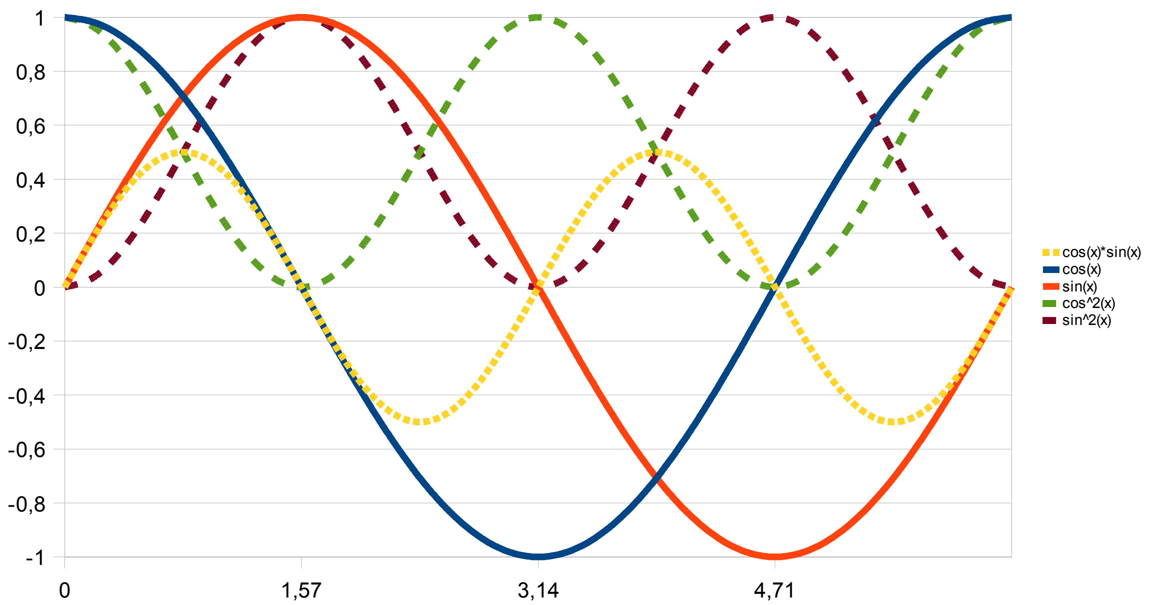
$$E_{LC}(t)=\frac{1}{2}C\,U_{max}^2\cdot\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)+\frac{1}{2}L\,I_{max}^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)=const.$$

Trochu zvláštní je, že se neustále bavíme o „kruhu" a o jeho „poloměru" (v oboru hodnot funkcí sínus a kosínus), přitom na osách soustavy souřadnic máme neshodné jednotky: napětí a proud. Čili se jedná přinejmenším o nějakou zobecněnou elipsu, kde jednotky na obou osách nejsou bez problémů navzájem zaměnitelné. Osy jsou zaměnitelné na úrovni základních funkcí sínus/kosínus a pak až na úrovni energií (v druhé mocnině). Možná přesně proto je vhodnější, značit okamžitou hodnotu napětí a proudu komplexním číslem. Pak by taky dával lepší smysl konstantní „poloměr" kruhu (absolutní hodnota komplexního čísla, počítá se větou Pythagorovou).

Jaký je vlastně okamžitý elektrický výkon ***P***, protékající rezonujícím obvodem? Napětí na obou součástkách (L a C) je shodné a stejně tak i hodnota proudu protékajícího L a C shodná. Z toho plyne vzorec

$$P=U_{max}\cdot\cos(2\pi\,f\,t)\cdot I_{max}\cdot\sin(2\pi\,f\,t)$$

Jakpak asi vypadá graf funkce ***sin(x)*cos(x)*** ?
Vypadá zajímavě – v následujícím grafu žlutě tečkovaná čára.



Součinem obou funkcí vznikla sinusioda o dvojnásobné frekvenci, ale poloviční amplitudě. Jinak řečeno,

$$\sin(x)\cdot\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

Potažmo

$$P=U_{max}\cdot\cos(2\pi f t)\cdot I_{max}\cdot\sin(2\pi f t)=U_{max}\cdot I_{max}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(4\pi f t)$$

Všimněte si, že protékající výkon protíná nulu v bodech, kde je energie na moment nahromaděna pouze v cívce nebo pouze v kondenzátoru. Krát dvě polarity jsou čtyři kvadranty, a čtyři body, kdy se přelévání energie na moment zastaví „v úvrati“. To také znamená, že celková energie akumulovaná v rezonančním obvodu (viz $\boldsymbol{E_{LC}}$ výše) se během jedné periody kmitu přelije mezi oběma součástkami ***čtyřikrát***.

Tohle by mělo jít spočítat. Energie je vlastně integrál výkonu podle času. Takže celková energie v rezonátoru by měla být rovna určitému integrálu přenášeného výkonu za čtvrtperiodu (***π/2***[Rad]), ovšem vyjádřeno jako čas [s], aby se dalo podle času integrovat:

$$\omega t=2\pi f t=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ t=\frac{T}{4}=\frac{1}{4\mathrm{f}}$$

$$E_{\pi/2}=\int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi/2} P(t)\,dt=\int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi/2} U_{max}\cdot\cos(\omega t)\cdot I_{max}\cdot\sin(\omega t)\,dt=\int_{\omega t=0}^{\omega t=\pi/2} U_{max}\cdot I_{max}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\omega t)\,dt=$$

$$=\int P\left(\frac{1}{4\mathrm{f}}\right)dt-\int P(0)\,dt=$$

$$=\frac{U_{max}\cdot I_{max}}{2}\cdot\frac{1}{4\pi f}\cdot\left(-\cos\left(\frac{4\pi f}{4\mathrm{f}}\right)\right)+c\ -\ \frac{U_{max}\cdot I_{max}}{2}\cdot\frac{1}{4\pi f}\cdot(-\cos(4\pi f\cdot 0))-c=$$

$$=\frac{U_{max}\cdot I_{max}}{8\pi f}\cdot(-\cos(\pi)+\cos(0))=\frac{U_{max}\cdot I_{max}}{8\pi f}\cdot(1+1)=\frac{U_{max}\cdot I_{max}}{4\pi f}=\frac{U_{max}\cdot I_{max}\cdot 2\pi\sqrt{LC}}{4\pi}=$$

$$=\frac{U_{max}\cdot I_{max}\cdot\sqrt{LC}}{2}$$

My ovšem dále víme, že $\boldsymbol{U_{max}}$ a $\boldsymbol{I_{max}}$ v rezonančním obvodu nejsou navzájem nezávislé – jejich vzájemný poměr záleží na hodnotách indukčnosti a kapacity. Konstantou je energie. Můžeme tedy poměr spočítat třeba právě přes energii:

$$E_{LC const}(t)=E_{Lmax}=E_{C\,max}$$

$$\frac{1}{2}L\,I_{max}^2=\frac{1}{2}C\,U_{max}^2$$

$$I_{max}^2=U_{max}^2\cdot\frac{C}{L}$$

$$U_{max}^2=I_{max}^2\cdot\frac{L}{C}$$

A zkusíme dosadit do našeho vzorce pro „integrál přes čtvrtperiodu“:

$$E_{\pi/2}=\frac{U_{max}\cdot\sqrt{U_{max}^2\cdot\frac{C}{L}}\cdot\sqrt{LC}}{2}=\frac{U_{max}\cdot\sqrt{U_{max}^2\cdot C^2}}{2}=\frac{1}{2}C\,U_{max}^2$$

$$E_{\pi/2}=\frac{\sqrt{I_{max}^2\cdot\frac{L}{C}}\cdot I_{max}\cdot\sqrt{LC}}{2}=\frac{\sqrt{I_{max}^2\cdot L^2}\cdot I_{max}}{2}=\frac{1}{2}L\,I_{max}^2$$

S ohledem na výše uvedené „pulzování přenášeného výkonu“ je možná napohled pikantní, leč matematicky nakonec pochopitelné, že zároveň kruhový pohyb (rotace fázoru U,I) je stálý a nepřetržitý – fázový vektor se otáčí rovnoměrně (konstantní úhlovou rychlostí) v nulách i maximech okamžitého výkonu...

Mechanika

S mechanickou analogií se už tolik párat nebudeme.

Za zmínku stojí pojem „mechanická impedance“ - nebyl jsem si jist, zda by přímé překlopení elektronických vzorců do mechanické analogie nepůsobilo komicky/perpeťácky, ale opak je zřejmě pravdou – viz literatura. Rozhodně zde nebudu „vynalézat suchou vodu“.

Především existuje pojem mechanický odpor (činná impedance), s jednotkou [Ns/m]:

$$R=\frac{F}{v}$$

A existuje také „zdánlivý“ odpor, resp. impedance v obecném slova smyslu. A nás konkrétně zajímá zdánlivý odpor hmotnosti a ~~poddajnosti~~ pardon: tuhosti. Pokud to zapíšeme komplexním číslem, bude impedance hmotnosti a tuhosti čistě imaginární.

$$X_m=2\pi f\,m$$

$$X_k=\frac{k}{2\pi f}$$

Pokud si mezi tyto dvě impedance položíme rovnítko, lze klasicky odvodit Thomsonův vzorec pro rezonanční frekvenci:

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Dále se můžeme bavit o energii a výkonu – už jenom z rychlíku:

$$E_m=\frac{1}{2}m\,v^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{k}$$

$$E_{km}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{max}^2}{k} \cdot \cos^2(2\pi f t) + \frac{1}{2} m v_{max}^2 \cdot \sin^2(2\pi f t) = const.$$

$$E_{km}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{max}^2}{k} \cdot \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + \frac{1}{2} m v_{max}^2 \cdot \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = const.$$

$$P = F_{max} \cdot \cos(2\pi f t) \cdot v_{max} \cdot \sin(2\pi f t) = F_{max} \cdot v_{max} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(4\pi f t)$$

$$E_{\pi/2} = \frac{F_{max} \cdot v_{max} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{2}$$

Literatura

Základní vzorce najdete v každé učebnici... Za zmínku ovšem stojí některé poměrně neobyčejné publikace:

Pár slov o Eulerově vzorci, s návazností na Fourierovu transformaci:

http://www.complextoreal.com/tfft2.htm

Povídání firmy Bruel&Kjaer o mechanické impedanci a vyšetřování strukturální odezvy:

http://www.bksv.fr/doc/17-179.pdf